Opción A

Modelo6 Ejercicio 1 Opción A sobrantes 1996

(a) (1'5 puntos]. Calcula, de manera razonada, todas las funciones f : R $\rightarrow$ R que verifican $f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(b) [1 punto]. Estudia la derivabilidad de cada una de las funciones f halladas.

Solución

a)

En todo $\Re$ tenemos f(x) con $f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Por el teorema fundamental del calculo integral que nos dice: Si g(x) es continua en el intervalo [a,b] entonces la función G(x) = $\int_a^x g(t)dt$ es derivable y su derivada es G '(x) = g(x).

En nuestro caso tenemos f(x) = $\int$ f '(x)dx

Si x < 0, f(x) = $\int$ f '(x)dx = $\int$ e^x dx = e^x + K

Si x > 0, f(x) = $\int$ f '(x)dx = $\int$ (2x + 1) dx = x^2 + x + H

Como la función está definida en todo $\Re$, las posibles funciones buscadas son $f(x) = \begin{cases} e^x + K & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x + H & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$,

con K y H números reales cualesquiera. Como observamos cada rama de la función es continua.

La función f(x) está definida en x = 0, pero no nos han dicho que sea continua en x = 0 por tanto no sé la relación que puede existir entre las constantes H y K

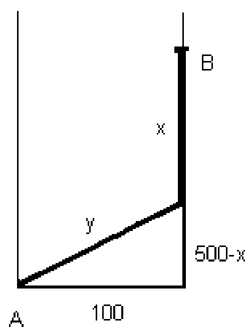
b)

La derivabilidad de todas las funciones f(x) ya me la han dado, y es $f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ con lo cual lo único que sabemos es que no está definida en x = 0, es decir no existe f '(0) lo cual no implica que no sea continua en 0, pero no lo sabemos porque no nos lo han dicho.

Modelo6 Ejercicio 2 Opción A sobrantes 1996

[2'5 puntos]. En la orilla de un río de 100 metros de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta y a 500 metros río arriba se ha construido una fábrica. Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta eléctrica y la fabrica, que el tendido de cables a lo largo de la orilla cuesta 1.200 ptas. el metro y que el tendido de cables sobre el agua cuesta 2.000 ptas. el metro, ¿cuál es la longitud del tendido más económico posible entre la planta eléctrica y la fábrica?

Solución



Coste = C = 2000y + 1200x

Relacion $y^2 = 100^2 + (500 - x)^2$, de donde y = + $\sqrt{100^2+(500-x)^2} = \sqrt{x^2-1000x+260000}$

Sustituyendo C(x) = (2000). $\sqrt{x^2-1000x+260000}$ + 1200x

Derivando tenemos $C'(x) = \dfrac{1000(-1000+2x)}{\sqrt{x^2-1000x+260000}} + 1200$

Resolviendo la ecuación C '(x) = 0 se obtiene x = 425 (El cálculo es largo y tedioso)

Calculamos C ''(x) para comprobar que es un mínimo (C ''(425) > 0)

$$C''(x)=\frac{-500(-1000+2x)}{\sqrt{(x^2-1000x+260000)^3}}+\frac{2000}{\sqrt{x^2-1000x+260000}}$$

Sustituyendo y operando obtenemos C ''(425) =256/25 > 0 con lo cual es un mínimo.

Sustituyendo x = 425 en y = $\sqrt{x^2-1000x+260000}$, obtenemos y = 125, por tanto las longitudes que nos hacen mínimo el coste son x = 425 e y = 125 metros.

Modelo6 Ejercicio 3 Opción A sobrantes 1996

(a) [1'5 puntos]. Discute el siguiente sistema según los valores del número real a:

$$\begin{aligned} ax + 2y + 3z &= 1,\\ ay + 4z &= 0,\\ x - y + z &= 0, \end{aligned}$$

(b) [1 punto]. Resuélvelo para a = -1

Solución

a)

Dado el sistema

$$\begin{aligned} ax + 2y + 3z &= 1,\\ ay + 4z &= 0,\\ x - y + z &= 0, \end{aligned}$$

su matriz de los coeficientes A y su matriz ampliada A^* son A = $\begin{pmatrix} a & 2 & 3\\ 0 & a & 4\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ y A^* = $\begin{pmatrix} a & 2 & 3 & 1\\ 0 & a & 4 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Para estudiar la compatibilidad del sistema estudiamos el rango de su matriz de los coeficientes A y su matriz ampliada A^*.

det(A) = $\begin{vmatrix} a & 2 & 3\\ 0 & a & 4\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}$ = a(a + 4) – 0 + 1(8 – 3a) = a^2 + a + 8

det(A) = 0, nos da a^2 + a + 8 = 0 que no tiene soluciones reales (su gráfica es una parábola con las ramas hacia arriba que no corta nunca al eje de abscisas), por tanto el sistema dado es compatible y determinado sea cual sea el valor de "a", es decir y tiene solución única sea cual sea el "a".

b)

Lo resolvemos para a = -1

-x + 2y + 3z = 1		-x + 2y + 3z = 1		-x + 2y + 3z = 1
-y + 4z = 0		-y + 4z = 0		-y + 4z = 0
x – y + z = 0	3ªF+1ªF(1)	y + 4z = 1	3ªF+2ªF(1)	8z = 1, de donde

z = 1/8, y = 4(1/8) = 1/2, y x = 2(1/2) + 3/8 – 1 = 3/8.

La solución es (x,y,z) = (3/8, 1/2, 1/8)

Modelo6 Ejercicio 4 Opción A sobrantes 1996

(a) [1'25 puntos]. Determina las ecuaciones de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano determinado por el punto (1,1,1) y la recta de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} y = 0,\\ 2x + 3z = 1. \end{cases}$$

(b) [1'25 puntos]. El mismo problema pero para la recta de ecuaciones $s \equiv \begin{cases} x + 2y + 3z = 6,\\ 3x + 2y + z = 1. \end{cases}$

Solución

a)

Formamos el haz de planos que determina la recta $r \equiv \begin{cases} y = 0,\\ 2x + 3z = 1. \end{cases}$

(2x + 3z – 1) + a(y) = 0

Le imponemos la condición de que pase por el punto (1,1,1)

(2 + 3 – 1) + a(1) = 0, de donde a = -4 luego el plano que contiene al punto (1,1,1) y a la recta "r" es el de ecuación $\pi \equiv$ 2x – 4y +3z – 1 = 0. Su vector normal es **n** = (2,-4,3)

La recta "t" pedida como es perpendicular a este plano tiene por vector director **v** el vector normal del plano **n** es decir **v** = **n** = (2,-4,3) y pasa por el origen O(0,0,0), po tanto su ecuación en forma continua es

x/2 = y/(-4) = z/3

b)

Formamos el haz de planos que determina la recta $s \equiv \begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 3x + 2y + z = 1. \end{cases}$

$(x + 2y + 3z – 6) + a(3x + 2y + z – 1) = 0$
Le imponemos la condición de que pase por el punto (1,1,1)
$(1 + 2 + 3 – 6) + a(3 + 2 + 1 – 1) = 0$, de donde $0 +5a = 0$, y por tanto $a = 0$, luego el plano que contiene al punto (1,1,1) y a la recta “s” es el de ecuación $\pi' \equiv x +2y +3z – 6 = 0$. Su vector normal es **n ‘** = (1,2,3)

La recta “ t ‘ ” pedida como es perpendicular a este plano tiene por vector director **v ‘** el vector normal del plano **n ‘** es decir **v ‘** = **n ‘** = (1,2,3) y pasa por el origen O(0,0,0), por tanto su ecuación en forma continua es

$$x/1 = y/2 = z/3$$

Opción B

Modelo6 Ejercicio 1 Opción B sobrantes 1996

Sea $f : R \rightarrow R$ la función polinómica dada por $f(x) = -2x^3 + 15x^2 – 24x + 80$.
(a) [1 punto]. Determina el intervalo [a, b] en el que f es creciente.
(b) [1'5 puntos]. Calcula el área limitada por la parte de la gráfica de f correspondiente al intervalo [a, b], el eje OX y las rectas x = a y x = b

Solución

a)
$f(x) = -2x^3 + 15x^2 – 24x + 80$.
Vemos su monotonía estudiando su primera derivada f ‘(x) y de ahí obtendremos el intervalo donde es creciente.
$f'(x) = -6x^2 + 30x – 24$
De $f'(x) = 0$, obtenemos $-6x^2 + 30x – 24 = 0$, simplificando $x^2 – 5x + 4 = 0$ ecuación que tiene como soluciones x = 1 y x = 4.
Como $f'(0) = -24 < 0$, f(x) es estrictamente decreciente en $(-\infty,1)$
Como $f'(2) = 12 > 0$, f(x) es estrictamente creciente en (1,4)
Como $f'(5) = -99 < 0$, f(x) es estrictamente decreciente en $(-\infty,1)$

La función $f(x) = -2x^3 + 15x^2 – 24x + 80$ es creciente en el intervalo [1,4]
b)
Como f(1) = 13, la función siempre es positiva en el intervalo [1,4] por tanto su área es:

$$\text{Área} = \int_1^4 (-2x^3 + 15x^2 – 24x + 80)dx = [-x^4/2 + 5x^3- 12x^2 + 80x]_1^4 =$$

$$= (- 128 + 320 – 192 + 320) – (-1/2 + 5 – 12 + 80) = 495/2 \ u^2$$

Modelo6 Ejercicio 2 Opción B sobrantes 1996

De las siguientes afirmaciones, hechas sobre una función $f : \Re \rightarrow \Re$, ¿cuáles DEBEN ser ciertas, PUEDEN ser ciertas en algunas ocasiones o NUNCA son ciertas? Justifica, las respuestas; en el caso de una respuesta “PUEDE” debes dar un ejemplo en el que la correspondiente afirmación sí es cierta y otro en el que no es cierta.

(a) [0'75 puntos]. Si $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ y f es continua entonces f(0) = 1.

(b) (0'75 puntos]. Si $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 3$ entonces f '(0) = 3.

(c) [1 punto]. Si $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 3$ entonces y = 3x + 1 es la ecuación de, la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.

Solución

a)
Si $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ y f es continua entonces f(0) = 1
NUNCA es cierta porque si f(x) es continua y f(0) = 1, tenemos que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$ con lo cual resulta que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1/0 = \infty$
b)
Si $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 3$ entonces f '(0) = 3

CIERTA puesto que el límite que tengo es la definición de la derivada de f(x) en x = 0, es decir f '(0).
c)

Si $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 3$ entonces y = 3x + 1 es la ecuación de, la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0

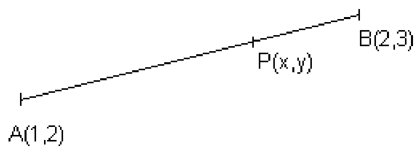
PUEDE ser cierta pues por el apartado b) sabemos que f '(0) = 3, y también sabemos que f '(0) es la pendiente de la recta tangente, luego la ecuación de la recta tangente en x = 0 es:
y - f(0) = f '(0)(x – 0), es decir la recta tangente es y = 3x + f(0), y en este apartado no me han dicho que f(0) sea 1. Si f(0) fuese 1 si sería cierta.

Modelo6 Ejercicio 3 Opción B sobrantes 1996

(a) [1'5 puntos]. En el segmento cuyos extremos son los puntos A = (1,2) y B = (2,3) hay un punto P tal que la relación que existe entre los vectores **PA** y **PB** es la siguiente: **PA** = 3/2**PB** Halla P.
(b) [1 punto]. Halla la ecuación de la circunferencia con centro en P y que pasa por el origen de coordenadas.

Solución

a)



PA = (3/2)**PB**
(1 – x, 2 – y) = (3/2)(2 – x, 3 – y
(2 – 2x, 4 – 2y) = (6 – 3x, 9 – 3y) Igualando miembro a miembro

2 – 2x = 6 – 3x
4 – 2y = 9 – 3y
Resolviendo este sistema obtenemos x = 4 e y = 5, luego el punto buscado es P(4,5)
b)
La ecuación de la circunferencia con centro en P(4,5) y que pasa por el origen de coordenadas O(0,0), tiene de centro P(4,5) y de radio r = d(O,P) = ||**OP**|| = $\sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$
La ecuación de la circunferencia es $(x – 4)^2 + (y – 5)^2 = 41$

Modelo6 Ejercicio 4 Opción B sobrantes 1996

[2'5 puntos]. Una ganadera da a su ganado una mezcla de dos tipos de piensos A y B. Un kilo del pienso A proporciona a una res el 6% de sus necesidades diarias de proteínas y el 14% de sus necesidades de carbohidratos. Un kilo del pienso B contiene el 35% del requerimiento diario de proteínas y el 15% del de carbohidratos. Si la ganadera desea que su ganado tenga cubiertas, pero sin excedentes, sus necesidades diarias de proteínas y carbohidratos, ¿cuántos kilos diarios de cada tipo de pienso deberá proporcionar a rada res?

Solución

	Proteinas	Carbohidratos
A	6%	14%
B	35%	15%

x = Kilogramos de A
y = Kilogramos de B

El sistema que nos queda es
6x + 35 y = 100
14x + 15y = 100

Resolviéndolo queda x = 5 e y = 2